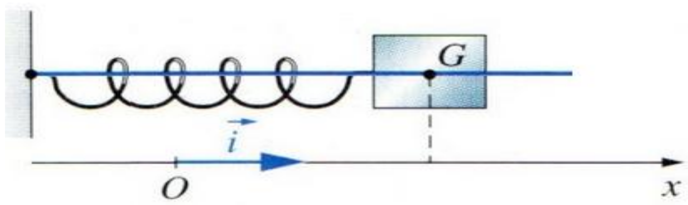
Mécanique Forcé - Analogie avec Electrique forcé

Exercice N° - 1 -

Un oscillateur mécanique, formé d'un solide **S** de masse **m = 40 g** accroché à l'extrémité d'un ressort horizontal de raideur **K**, est excité par une force sinusoïdale $\vec{F} = F_m.\sin(\omega_e t + \varphi_e)\vec{i}$ de pulsation ω_e variable et d'amplitude constante $F_m = 3\ N$.



Au cours de son mouvement, le solide **S** subit l'action d'une force de frottement $\vec{f} = -h.\vec{v}$ tel que **h** est une constante positive et $\vec{v}$ la vitesse du solide **S**. la position G_0 lorsque **S** est en équilibre coïncide avec l'origine O du repère $(O, \vec{i})$.

1) Sachant que S effectue des oscillations forcées d'élongations $x(t) = X_m.\sin(\omega_e t)$ et de vitesse $v(t) = V_m.\sin(\omega_e t + \varphi_v)$

a- Etablir l'équation différentielle reliant **x** à ses dérivées première et seconde.

b- Quelle est l'expression de la pulsation propre ω_0 de cet oscillateur ?

c- En exploitant la construction vectorielle de Fresnel correspondante à l'équation différentielle dans le cas ou $\omega_e < \omega_0$, déterminer les expressions littérales donnant X_m et $tg(\varphi_e - \varphi_x)$ en fonction de **K, F_m, h, m** et ω_e.

2) On fait varier la pulsation ω_e de la force excitatrice et on suit simultanément les variations de X_m et de V_m , on constate que pour $\omega_{e1} = 42,4\ rd.s^{-1}$ on a résonance d'amplitude et pour $\omega_{e2} = 50\ rd.s^{-1}$ on a résonance de vitesse.

a- Montrer qu'à la résonance d'amplitude $\omega_e^2 = \omega_0^2 - \frac{h^2}{2m^2}$.

b- Calculer les valeurs de **K, h,** φ_e, et V_m. En déduire celle de X_m .

c- Ecrire l'expression de $x(t)$. En déduire **celle de** $v(t)$.

d- Faire la construction de Fresnel correspondante.

3)

a- Donner l'expression de $tg(\varphi_e - \varphi_v)$ en fonction de **m**, **K** et **h**.

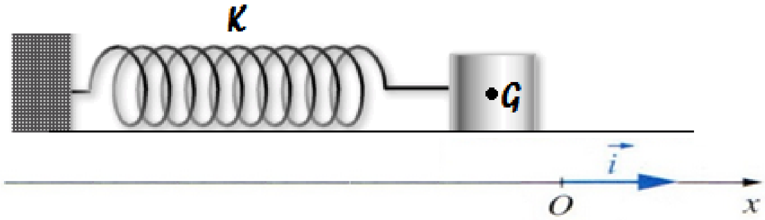
b- Montrer que si $(\varphi_e - \varphi_v) = \frac{\pi}{4}$ **rad**, ω_e vérifie la relation $m\omega_e^2 + h\omega_e - K = 0$.

c- En déduire la ou les valeurs de ω_e, qui réalise (réalisent) ce déphasage.

Exercice N° - 2 -

I-

Un oscillateur mécanique comporte un solide **S** de masse **m = 10 g** et un ressort de masse négligeable et de raideur **K**. le solide S est soumis à une force de frottement de type visqueux $\vec{f} = -h.\vec{v}$ ou **h** est une constante positive et $\vec{v}$ la vitesse du solide **S.**
On écarte le solide **S** de sa position d'équilibre d'une distance x_0 et on le libère sans vitesse initiale.



1) Montrer que l'équation différentielle vérifiée par l'élongation $x(t)$ du centre d'inertie **G** du solide est : $m\frac{d^2x}{dt^2} + h\frac{dx}{dt} + Kx = 0$.

2)

- **a-** Ecrire l'expression de son énergie mécanique à un instant **t** quelconque.
- **b-** Montrer que cette énergie diminue au cours du temps.

II-

Le solide S est maintenant soumis à une force excitatrice $\vec{F} = F_m.\sin(\omega_e t + \varphi_e)\vec{i}$, l'équation différentielle vérifiée par l'élongation devient alors :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + h\frac{dx}{dt} + Kx = F(t)$$

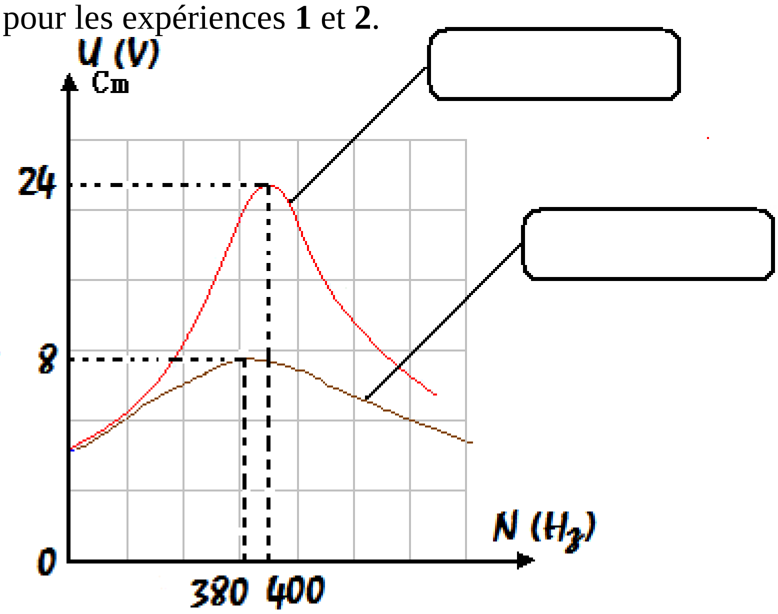
La solution de cette équation est $x(t) = X_m.\sin(\omega_e t + \varphi_e)$ avec $X_m = \frac{F_m}{\sqrt{h^2\omega_e{}^2 + (K - m\omega_e{}^2)^2}}$

1)

- **a-** Donner le circuit électrique analogue à cet oscillateur mécanique.
- **b-** Ecrire, par analogie avec la mécanique, l'équation différentielle mettant en jeu la charge q du condensateur du circuit électrique précédent.
- **c-** Justifier, pourquoi on qualifie les oscillations électriques de la charge q(t) du condensateur de « **forcées** ».
- **d-** Ecrire par analogie l'expression de la charge maximale du condensateur.

2) L'étude d'un dipôle **RLC** en régime sinusoïdal d'oscillations forcées, permet de tracer les graphes de la **figure – 2 –** pour les expériences **1** et **2**.

Figure - 2 -



a- Indiquer, en le justifiant, si la tension maximale U_{Cmax} aux bornes du condensateur atteint sa valeur la plus grande possible à la résonance de charge ou à la résonance d'intensité ?

b- Compléter la légende grisée de la **figure -2-** par l'une des expressions de la liste suivantes :

Résonance d'élongation – résonance floue – résonance d'intensité – résonance aigue – réponse linéaire – résonance de charge.

c- Marquer la position approximative de la fréquence propre $\mathbf{N_0}$ de l'oscillateur sur l'axe des abscisses de la **figure – 2 -.**

d- Pour passer de **l'expérience 1** à **l'expérience 2**, quel composant faut – il modifier sa valeur ? Faut – il augmenter ou diminuer cette valeur ?

e- La puissance électrique moyenne consommée par le dipôle **RLC** lorsque **N = 400 Hz** est **P = 80 mW**.

→ Calculer la valeur de la résistance **R**. la capacité du condensateur étant $C = 1\ \mu F$.

On rappelle qu'en régime sinusoidal forcé, la puissance moyenne d'un pendule élastique est donnée par la relation $P = \frac{1}{2}hV_m{}^2$ ou V_m **est l'amplitude de la vitesse du centre d'inertie du solide.**

Exercice N°– 1-

I-

1)

a- Les forces extérieures exercées sur le solide **S** sont :

- $\vec{P}$ poids du solide
- $\vec{R}$ la réaction du plan
- $\vec{T}$ la réaction du plan horizontal (bac à coussin d'air).
- $\vec{f}$ la force de frottement visqueux.
- $\vec{F}$ force excitatrice.

La **R.F.D** s'écrit : $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \leftrightarrow \vec{P} + \vec{T} + \vec{R} + \vec{f} + \vec{F} = m\vec{a}$

Projection sur l'axe du mouvement **(x'ox)**, on aura : $-kx - hv + F = ma \quad \leftrightarrow ma + hv + kx = F$

Avec : $\begin{cases} a = \frac{dv}{dt} \\ v = \frac{dx}{dt} \end{cases} \leftrightarrow a = \frac{d^2x}{dt^2}$ d'où l'équation différentielle est :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + h\frac{dx}{dt} + kx = F_m.sin(\omega_e t + \varphi_e)$$

L'expression de la pulsation propre ω_0 de cet oscillateur est $\omega_e = \sqrt{\frac{k}{m}}$

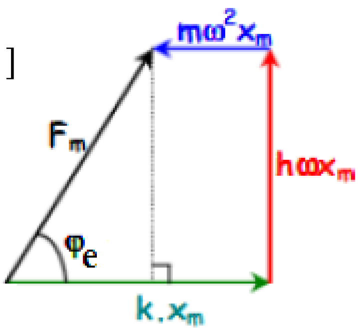
b- Les vecteurs de Fresnel sont :

$kx = kX_m\sin(\omega_e t) \quad \rightarrow \vec{v_1}\,[kX_m, 0]$

$h\frac{dx}{dt} = h\omega_e X_m\sin\left(\omega_e t + \frac{\pi}{2}\right) \quad \rightarrow \vec{v_2}\left[h\omega_e X_m, +\frac{\pi}{2}\right]$

$m\frac{d^2x}{dt^2} = m{\omega_e}^2 X_m\sin(\omega_e t + \pi) \quad \rightarrow \vec{v_3}\,[m{\omega_e}^2 X_m, +\pi]$

$F = F_m.sin(\omega_e t + \varphi_e) \quad \rightarrow \vec{v}\,[F_m, \varphi_e]$



Construction de Fresnel dans le cas ou : $\omega_e < \omega_0$

On a $\Delta\varphi = \varphi_e - \varphi_x = \varphi_e > 0$

F est toujours en avance de phase par rapport à **x**.

En utilisant le théorème de Pythagore, on obtient :

$X_m = \frac{F_m}{\sqrt{h^2\omega_e^2 + (k - m\omega_e^2)^2}}$ Et $tg(\Delta\varphi) = tg(\varphi_e - \varphi_x) = tg(\varphi_e) = \frac{h\omega_e}{k - m\omega_e^2}$

2)

a- A la résonance de vitesse, on a $\omega_{e2} = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ alors $k = m\omega_{e2}^2$ soit $\mathbf{k = 100}\ N.m^{-1}$

A la résonance d'amplitude $\omega_{e1}^2 = \omega_{e2}^2 - \frac{h^2}{2m^2}$ soit $h = m.\sqrt{2(\omega_{e2}^2 - \omega_{e1}^2)}$ d'où $h = 1,5\ Kg.s^{-1}$

$tg(\varphi_e) = \frac{h\omega_e}{k - m\omega_e^2} = 2,26$ Soit $\varphi_e = 1,15\ rd$

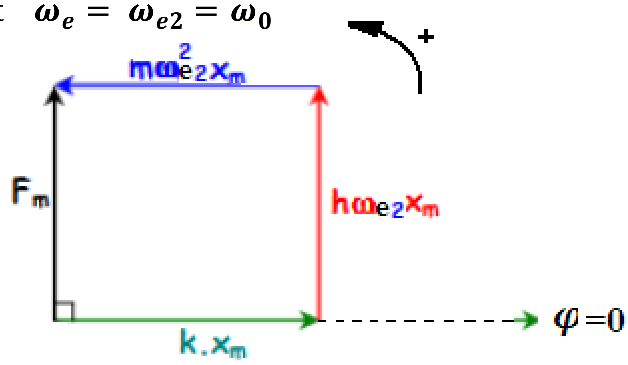
$V_{om} = \frac{F_m}{h}$ Donc $V_{om} = 2\ m.s^{-1}$

A la résonance de vitesse $\omega_e = \omega_{e2}$ et $V_{om} = \omega_{e2}X_m$ alors $X_m = \frac{\omega_{e2}}{V_{om}}$ soit $X_m = 0,04\ m$

b- $x(t) = X_m sin(\omega_{e2}t + \varphi_x) = X_m sin(\omega_{e2}t) = 0,04 sin(50t)$

$v(t) = V_{0m} sin\left(\omega_{e2}t + \frac{\pi}{2}\right) = 2 sin(50t + \frac{\pi}{2})$

c- Construction de Fresnel quant $\omega_e = \omega_{e2} = \omega_0$



3)

a- $tg(\varphi_e - \varphi_v) = \frac{m\omega_e - \frac{k}{m}}{h}$

b- $\frac{m\omega_e - \frac{k}{m}}{h} = tg\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$ soit $m{\omega_e}^2 + h\omega_e - k = 0$

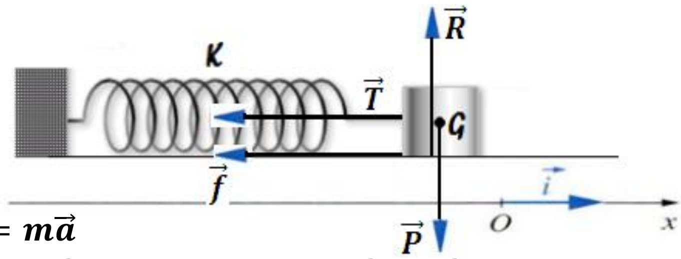
c- Pour déterminer la valeur de ω_e qui réalise le déphasage $\varphi_e - \varphi_v = -\frac{\pi}{4}$ $rad,$ on résout l'équation $0,04{\omega_e}^2 + 1,5\omega_e - 100 = 0$ on trouve $\omega_e = 34,65\ rad.s^{-1}$

Exercice N°– 2-

I-

1) Les forces appliquées au système formé par le solide de masse m, dans le référentiel terrestre sont :

- $\vec{P}$ poids du solide
- $\vec{R}$ la réaction du plan
- $\vec{T}$ la réaction du plan horizontal (bac à coussin d'air).
- $\vec{f}$ la force de frottement visqueux.



Pour $x > 0$ et $v > 0$ on a la représentation suivante :

La **R.F.D** s'écrit : $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \leftrightarrow \vec{P} + \vec{T} + \vec{R} + \vec{f} = m\vec{a}$

Projection sur l'axe du mouvement **(x'ox)**, on aura : $-kx - hv = ma \leftrightarrow ma + hv + kx = 0$

Avec : $\begin{cases} a = \frac{dv}{dt} \\ v = \frac{dx}{dt} \end{cases} \leftrightarrow a = \frac{d^2x}{dt^2}$ d'où l'équation différentielle est :$m\frac{d^2x}{dt^2} + h\frac{dx}{dt} + kx = 0$

2)

a- L'expression de l'énergie mécanique du système $\{solide, ressort\}$ à un instant **t** quelconque est donnée par : $E = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2$

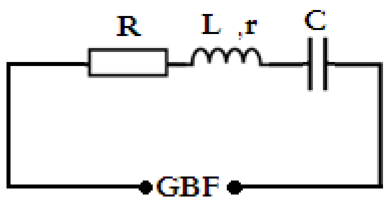
b- En dérivant l'expression de **E** par rapport au temps : $\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2\right) = mv\frac{dv}{dt} + kx\frac{dx}{dt}$

$\leftrightarrow \frac{dE}{dt} = v\left(m\frac{d^2x}{dt^2} + kx\right) = v \times (-hv) \leftrightarrow \frac{dE}{dt} = -hv^2 < 0$ D'où l'énergie mécanique du système diminue au cours du temps.

II-

1)

a- Le circuit électrique analogue à cet oscillateur mécanique forcé est :



b- Par analogie, l'équation différentielle mettant en jeu la charge **q** du condensateur du circuit électrique est : $L\frac{d^2q}{dt^2} + R_T\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = u(t)$

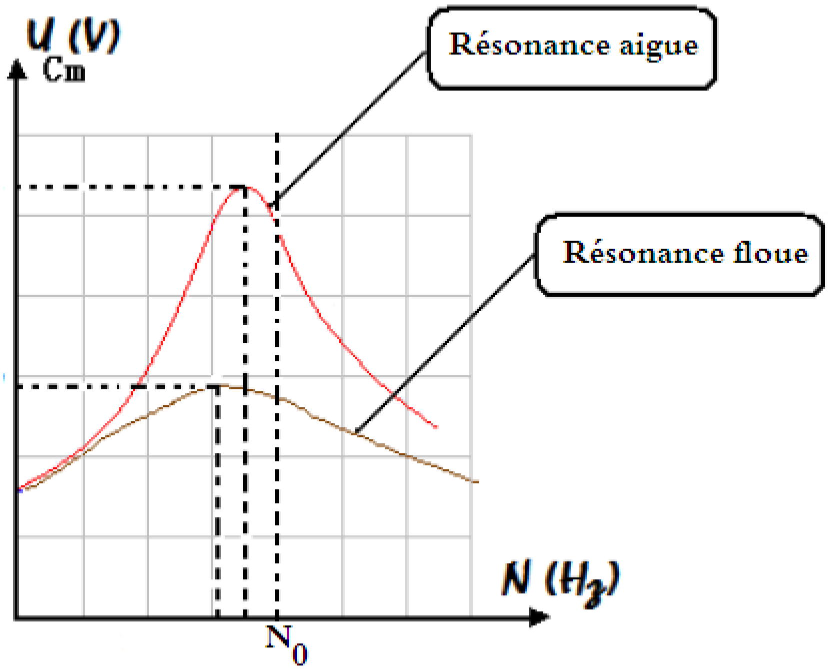
c- Les oscillations électriques de la charge **q(t)** du condensateur sont qualifiées de « **forcées** » car **q(t)** oscille à la pulsation imposée par l'excitateur (**GBF**).

d- Par analogie l'expression de la charge maximale du condensateur est : $\boldsymbol{Q_m} = \frac{U_m}{\sqrt{R_T^2\omega_e^2 + (\frac{1}{C} - L\omega_e^2)^2}}$

2)

a- A la résonance de charge, l'amplitude de la charge est maximale $\boldsymbol{q = Q_{max}}$ or $\boldsymbol{Q_{max} = C.U_{Cmax}}$ d'où la tension maximale $\boldsymbol{U_{Cmax}}$ atteint sa valeur la plus grande possible à la résonance de charge.

b-



c- La fréquence de résonance de charge est toujours inférieure à la fréquence propre $\mathbf{N_0}$ de l'oscillateur.

d- Pour passer de **l'expérience – 1 –** à **l'expérience – 2-**, il fait modifier la valeur de la résistance **R**.

e- La puissance électrique moyenne est : $\boldsymbol{P = \frac{1}{2}RI_m^2 = \frac{1}{2}R(2\pi N Q_m)^2 = \frac{1}{2}R(2\pi NCU_{Cm})^2}$

Soit $\boldsymbol{R = \frac{2P}{(2\pi NCU_{Cm})^2} = 44\ \Omega}$.